早稲田大学大学院 基幹理工学研究科

博士論文審査報告書

論　文　題　目

Invariant Hilbert schemes and resolutions of singularities of GIT quotients

不変 Hilbert スキーム 及び GIT 商の特異点解消

申　請　者

Ayako	KUBOTA
久保田	絢子

数学応用数理専攻　代数幾何学研究

2020 年 2 月

GIT 商の理論は，1960 年代に Mumford によって導入された．その目的は，代数幾何学に現れる種々のモジュライ問題の解としてのモジュライ空間を代数多様体として自然に構成することにあった．GIT 商の構成は体上有限生成環の簡約代数群による不変式環を貼り合わせ大域化したものであり，その源流は 19 世紀後半から 20 世紀に花開いた**不変式論**に求めることができる．代数多様体 M への簡約代数群 G の作用による GIT 商 $M/\!/G$ は，M が滑らかであっても一般には特異点を持つ．GIT 商から現れる特異点とそれにまつわる双有理幾何学，特に，特異点解消の問題は，代数多様体の商が関係する代数幾何学の研究の多くの場面で避けて通ることができない中心的な話題の一つである．

代数多様体の商を取って現れる特異点のなかで，最も簡単なのは，M が滑らかな代数多様体で，代数群 G が有限群であるような場合の特異点であり，これは**商特異点**と呼ばれる．この場合の商多様体 $M/\!/G$ は集合としては（基礎体の標数が 0 であるなどの若干の仮定の下で）集合論的な軌道の空間 M/G と一致し（いわゆる**幾何学的商**），M/G の特異点の様子は自明でない固定部分群を持つ軌道の周りでの様子によって記述される．自由な軌道は $\#(G)$ 個の点からなるのに対し，固定部分群が非自明になるような軌道では，その点の個数は少ない方向へ跳躍する．代数幾何学においては重複度を数えることで軌道の「点の個数」は一定であるとみなすことが自然で，このような解釈を与えることが，商集合 M/G に代数多様体の構造を与えることに対応している．この考え方を敷衍すると，M/G の特異点解消は，自由な軌道の極限に，重複度では捉えられない新たな情報を付け加えたものと捉えることができる．このような新しい極限の候補として，ヒルベルトスキームの中での極限を考えること，すなわち，M 内の G-不変な 0 次元閉部分スキームのモジュライ空間 $G\text{-Hilb}(M)$ を考えることは自然である．2000 年頃までの活発な研究により，例えば M の次元が 2 または 3 であり，G の作用が M の標準束 ω_M を保つときは，$G\text{-Hilb}(M)$ が M/G のクレパントな特異点解消を与えることが明らかになった (Ito-Nakamura, Bridgeland-King-Reid)．ここで，特異点 X の解消 $f : Y \to X$ がクレパントであるというのは相対標準束 $\omega_{Y/X} = \omega_Y \otimes f^*\omega_X^{-1}$ が自明束になることであり，その特異点解消が無駄のないものであることを表す性質の一つである．

ここから得られる教訓は，G が有限群とは限らない簡約群の場合でも，M/G の自由な軌道の極限を G-不変な閉部分スキームのなすモジュライ空間の中で考えたものは，M/G の良い双有理改変の候補になるということである．M がアファイン代数多様体であり，簡約代数群 G が M に作用しているとき，近年の Alexeev-Brion や Brion の仕事によって，この種のモジュライ空間を構成する問題は解決されており，**不変ヒルベルトスキーム** (invariant Hilbert scheme) と呼ばれる．不変ヒルベルトスキームは G-Hilb の一般化になっているが，G が有限群とは限らない場合，$M/\!/G$ はもはや G-軌道の空間ではなく，不変ヒルベルトスキームも次元が正の閉部分スキームのモジュライ空間であるため，G-Hilb に比べて分析が難しくなる．不変式論や表現論の観点から見れば，有限群の場合と簡約代数群の場合は非常に類似度が高く様々な議論が共通の枠組みで進むように思えるが，与えられた M および G に対して，対応する不変ヒルベルトスキームが GIT 商 $M/\!/G$ の特異点解消を与えるか，という問題に関して，肯定的または否定的な解決を与えた研究はこれまで数えるほどしか知られていなかった．

この学位論文における申請者の主要な研究成果は，正規アファイン **$SL(2)$-準等質多様体** E が，4 次元の（一般には特異点を持つ）アファイン超曲面 M の，階数 1 の擬トーラス G による GIT

商 $M/\!/G$ として自然に記述される (Batyrev-Haddad) ことに着目し，この G-多様体 M に付随する不変ヒルベルトスキーム $\mathrm{Hilb}_h^G(M)$ を調べ，それが $E = M/\!/G$ の特異点解消を与えることを証明したことにある（論文第 3 章〜第 5 章）.

正規アファイン $SL(2)$-準等質多様体（の同型類）は，$0 < l \leqslant 1$ を満たす有理数 l および正整数 m の組 (l, m) で分類される（Popov, Kraft, Panyushev）．準等質多様体 $E = E_{l,m}$ は，$l < 1$ のときは特異点を持ち，その限りにおいては，(l, m) の値によらず E の唯一の閉軌道はいつでも 1 点であり，この 1 点が特異点集合である．一方，l を $l = \frac{p}{q}$ と正整数の既約分数で表したとき，p, q, m の算術的な情報によって，準等質多様体 E の特異点の様相は大きく異なってくる．例えば，m が $q - p$ で割り切れることが，E がトーリック多様体になることと同値である（Gaĭfullin). E がトーリックであれば，特異点における 1 点ブローアップ $\tilde{E} = E'$ が E の特異点解消になることを見るのはたやすい．E がトーリックでない場合にも，E' を (l, m) から決まる適当な重みに関する重み付きブローアップとすれば，これは，2 次元巡回商特異点の局所自明族を特異点集合とするような代数多様体になる．したがって，E' は自然な極小特異点解消 $\tilde{E} \to E'$ を持つことがわかる．申請者の議論は，このようにして得られる $\tilde{E}$ の具体的記述を与え，それを使って，不変ヒルベルトスキーム $\mathrm{Hilb}_h^G(M)$ が $\tilde{E}$ と E 上同型になることを証明するものである．一般の (l, m) に対しては E や $\tilde{E}$ はトーリック多様体にならないが，スフェリカル多様体とよばれる構造を持ち，色付き扇の組み合わせ論的な情報によって記述できる．申請者は，スフェリカル多様体としての記述に注目することで，すべての (l, m) に関して統一的な形で $\tilde{E}$ の具体的な記述を得ることができた．これによって，$\tilde{E}$ が準等質多様体 E の極小モデルになる（すなわち，$\omega_{\tilde{E}}$ がネフになる）ための必要十分条件も，(l, m) にまつわる算術的条件で書き表すことができた.

不変ヒルベルトスキーム $\mathrm{Hilb}_h^G(M)$ の閉点は，M の座標環 S の G-不変なイデアル I であって，S/I を G-表現として既約分解したときに（$M/\!/G$ の一般の点に対応する G-軌道から定まる）重複度 h を持つもの全体である．いま G は擬トーラスであるから，この既約分解は，S/I に入る G の指標群 $\mathrm{X}(G)$ で次数付けられた次数環の構造に対応する．この次数分解 $S/I = \bigoplus_{\chi \in \mathrm{X}(G)} (S/I)_\chi$ に関する各次数部分は有限次元であり，その次元は $h(\chi)$ になる．対応する S の次数部分 S_χ の有限次元 G-部分表現 F_χ を適切に固定することによって，グラスマン多様体への分類写像 $\eta_\chi : \mathrm{Hilb}_h^G(M) \to \mathrm{Gr}(h(\chi), F_\chi^\vee)$ が得られるが，十分多くの χ に対する η_χ を考え，写像

$$\Psi : \mathrm{Hilb}_h^G(M) \to (M/\!/G) \times \prod_{j=1}^{m} \mathrm{Gr}(h(\chi_j), F_{\chi_j}^\vee)$$

を考えればこれが閉埋め込みになる．このようにして，$\mathrm{Hilb}_h^G(M)$ の構造を明らかにしようとするとき，重みの集合 $\{\chi_1, \dots, \chi_m\}$ と，そのそれぞれに対して有限次元 G-部分表現 $F_{\chi_j} \subset S_{\chi_j}$ をどう選ぶかが問題になるが，一般にはこれは極めて難しい問題である．申請者は，$\tilde{E}$ のスフェリカル多様体としての記述が与える算術的情報から，重みの集合 $\{\chi_j\}$ と部分表現 F_{χ_j} の正しいとり方を見出し，更に，M への $SL(2)$ の作用から誘導される不変ヒルベルトスキーム $\mathrm{Hilb}_h^G(M)$ への $SL(2)$ 作用の各軌道に含まれるイデアルの具体的な記述を与えることに成功した．この部分がこの学位論文の技術的な核である．ここまでの結果から，閉埋め込み Ψ の像が $\tilde{E}$ と同型になることは比較的簡単に従う.

このように見てくると，正規アファイン $SL(2)$-準等質多様体がそれ自体興味深い多様体のクラスを形成しているとはいえ，この学位論文が問題にしているのは特殊で孤立した具体例であるように思えるかもしれないが，そうではない．実際，Batyrev-Haddad による準等質多様体の GIT 商としての表示 $E = M/\!\!/G$ に現れた M は偶然見つけられたものではなく，本質的には，E の **Cox 環**に対応するアファイン代数多様体である．一般に，正規アファイン多様体 E が有限生成な因子類群 $\mathrm{Cl}(E)$ をもつ時，その Cox 環のスペクトラム M には $\mathrm{Cl}(E)$ の指標群であるところの擬トーラス G が作用し，GIT 商 $M/\!\!/G$ を取ることで E が復元できる．つまり，有限生成な因子類群をもつ正規アファイン多様体 E に対しては，標準的な方法で不変ヒルベルトスキーム $\mathrm{Hilb}_h^G(M)$ を対応させることができ，E を支配する不変ヒルベルトスキームの既約成分が E のよい双有理モデル（例えば特異点解消）を与えるか，という問題を考えることができる．上に説明した結果はこの大きな枠組みにおける問題に対して肯定的回答が与えられるひとつのケースであると理解するのが正しい．申請者は，学位論文の最後の章で，上に述べたような一般的な枠組みでの問題提起を与え，$\mathfrak{sl}_n$ の極大ベキ零軌道閉包 $\bar{O}_{[n]}$ に対しても，少なくとも，$n = 2, 3$ の場合には，Cox 環の商としての表示からくる不変ヒルベルトスキームが特異点解消を与えることを確かめている．

このように，学位申請者は正規アファイン $SL(2)$-準等質多様体の双有理幾何を不変ヒルベルトスキームによって調べる問題を完全に解決し，さらにはこれを因子類群が有限生成な正規アファイン多様体に対して，それを Cox 環の GIT 商として表した時の不変ヒルベルトスキームの性質を問うという一般化された枠組みの中に位置づけている．有限生成な因子類群をもつ正規アファイン多様体の Cox 環は一般には特異点をもち，そこに作用する擬トーラスも有限群とは限らないが，それでも，対応する不変ヒルベルトスキームが，少なくとも $SL(2)$-準等質多様体の場合，極めて良い性質を持っているという発見は独創性が高く，有限商特異点の McKay 対応の文脈で考えられた G-Hilb の理論の枠組みを大きく踏み越えていくものであり，今後の理論のさらなる発展を期待させる．以上のことから，本論文は博士（理学）の学位論文に相応しいものと認める．

2020 年 1 月

主査　早稲田大学 理工学術院 教授　博士（数理科学）東京大学　永井　保成

年　月　日

副査　早稲田大学 理工学術院 教授　理学博士 早稲田大学　楫　元

年　月　日

副査　名古屋大学 多元数理科学研究科 教授　博士（理学）京都大学　石井　亮

年　月　日